

Metoda VFO i jej zastosowania

Maciej Michałek

maciej.michalek@put.poznan.pl

Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów
Politechnika Poznańska

21.09.2010

Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Strategia VFO
- 3 Przykłady sterowników VFO
- 4 Symulacje i eksperymenty
- 5 Rozszerzenia VFO
- 6 Podsumowanie

Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Strategia VFO
- 3 Przykłady sterowników VFO
- 4 Symulacje i eksperymenty
- 5 Rozszerzenia VFO
- 6 Podsumowanie

Motywacja - dlaczego systemy nieholonomiczne (NHS)?

Kwestie teoretyczne

- trudności ze stabilizacją w punkcie (strukturalne ograniczenie – twierdzenie Brocketta)
- ograniczenia w ewolucji systemu w przestrzeni stanu
- pełna sterowalność pomimo więzów i mniejszej liczby sterowań w stosunku do zmiennych sterowanych

Kwestie praktyczne

- systemy nieholonomiczne – w powszechnym użyciu
- nowe ciekawe rozwiązania (manipulator nieholonomiczny)
- problemy z realizacją sterowników (jakość i koszt sterowania, złożoność, odporność, strojenie)

Sterowanie automatyczne dla NHS

Wymogi jakościowe

- 1 Stosowalność algorytmów dla szerokiej klasy NHS
- 2 Zunifikowane podejście do realizacji różnych zadań sterowania
(śledzenie trajektorii, odtwarzanie ścieżki, stabilizacja w punkcie ...)
- 3 Akceptowalna w praktyce jakość sterowania oraz niski koszt sterowania
- 4 Wystarczająca *precyzja* i odporność układu zamkniętego
- 5 Intuicyjna interpretacja składników sterowania
- 6 Prostota parametrycznej syntezy sterowników oraz ich praktycznej implementacji

Propozycja

Sterowanie metodą VFO (Vector Field Orientation) (oryginalnie motywowana przez 3, 5 i 6)

Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Strategia VFO**
- 3 Przykłady sterowników VFO
- 4 Symulacje i eksperymenty
- 5 Rozszerzenia VFO
- 6 Podsumowanie

Problem sterowania

System sterowany

$$\Sigma_f : \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad n > m$$

Sygnały referencyjne

R1. Śledzenie trajektorii w \mathbb{R}^n

$$\mathbf{q}_t := \mathbf{Q}_t(\tau)$$

R2. Sterowanie do punktu w \mathbb{R}^n

$$\mathbf{q}_t := \mathbf{Q}_t$$

Cel sterowania

Znaleźć regułę sterowania ze sprzężeniem zwrotnym $\mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_t, \cdot)$, która zastosowana do systemu Σ_f gwarantuje:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(\tau)\| \leq \epsilon, \quad \epsilon \geq 0, \quad \mathbf{e} \triangleq \mathbf{q}_t - \mathbf{q}$$

VFO – rozważane NHS

3D podklasa NHS

$$\Sigma : \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1 u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) u_2 = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (1)$$

gdzie

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{g}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(\mathbf{q}) \\ g_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} : \quad \exists_i \frac{\partial g_i}{\partial q_1} \neq 0 \quad i = 2, 3$$

\mathcal{Q} : przestrzeń konfiguracyjna (możliwe wyłączenie podzbiorów z \mathbb{R}^3)

\mathcal{U} : przestrzeń wejścia sterującego (podzbiór \mathbb{R}^2 dla wejść ograniczonych amplitudowo)

VFO – rozważane zadania sterowania

• Śledzenie

trajektorii dopuszczalnych (AD) oraz ustawicznie pobudzających (PE)

$$\mathbf{q}_t := \mathbf{Q}_t(\tau) = [q_{1t}(\tau) \ q_{2t}(\tau) \ q_{3t}(\tau)]^T \in \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$$

- $\mathbf{Q}_t(\tau)$ jest rozwiązaniem równania modelu Σ dla zadanych wejść $u_{1t}(\tau), u_{2t}(\tau)$ (AD)
- wejście $u_{2t}(\tau)$ spełnia warunek: $\forall \tau \geq 0 \ u_{2t}(\tau) \neq 0$ (PE)

• Stabilizacja (sterowanie do punktu)

$$\mathbf{q}_t := \mathbf{Q}_t = [q_{1t} \ q_{2t} \ q_{3t}]^T \in \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Podstawy strategii VFO

Dwa kluczowe elementy

- 1 Dekompozycja NHS oraz geometryczna interpretacja
- 2 Wprowadzenie *pola wektorowego zbieżności* (kształtowanie stanów przejściowych)



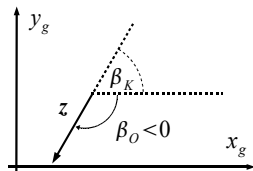
Podstawowe definicje

D1. **Kierunek** pola wektorowego $z = [z_1 \ z_2]^T$:

$$\beta_K(z) = \arg(z) = \arctan(z_2/z_1) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

D2. **Orientacja** pola wektorowego $z = [z_1 \ z_2]^T$:

$$\beta_O(z) = \text{Arg}(z) = \text{Atan2}(z_2, z_1) \in (-\pi, \pi]$$



Podstawy strategii VFO (c.d.)

$$\Sigma : \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(\mathbf{q}) \\ g_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} u_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) \end{bmatrix} u_2 \quad (2)$$

Dekompozycja systemu Σ

$$\Sigma^1 : \quad \dot{q}_1 = u_1 \quad (3)$$

$$\Sigma^* : \quad \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) u_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_K(\dot{\mathbf{q}}^*) = \beta_K(\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})), \quad \beta_O(\dot{\mathbf{q}}^*) = \beta_O(\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) \operatorname{sgn}(u_2)) \quad (4)$$

Zmiana orientacji/kierunku $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$

$$\exists_i \frac{\partial g_i}{\partial q_1} \neq 0, \quad i = 2, 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dq_1}{d\tau} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \beta_O(\mathbf{g}_2^*), \quad \frac{d}{d\tau} \beta_K(\mathbf{g}_2^*)$$

Dekompozycja procesu sterowania

- podsystem Σ^1 (wejście u_1) \Rightarrow **orientowanie** $\mathbf{g}_2^*(q_1, \cdot)$
- podsystem Σ^* (wejście u_2) \Rightarrow **popychanie** \mathbf{q}^* wzdłuż \mathbf{g}_2^*

Podstawy strategii VFO (c.d.)

Pole wektorowe zbieżności

$h(q, \cdot)$ definiuje w każdym punkcie q **żądaną orientację/kierunek** ewolucji systemu Σ
 $\Rightarrow h$ definiuje **orientację i kierunek zbieżności** do q_t

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \mathbf{h}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{h} = h(q, q_t, \cdot) \quad (5)$$

- h_1 – definiuje *orientację/kierunek* zbieżności dla q_1
- \mathbf{h}^* – definiuje *orientację/kierunek* zbieżności dla q^*

Warunek dobrego określenia pola h

$$h(q, q_t, \cdot) \text{ zdefiniowane tak, że zachodzi: } q_1 \rightarrow q_{1t} \quad \text{gdy} \quad q^* \rightarrow q_t^* \quad (6)$$

Podstawy strategii VFO (c.d.)

Zasady projektowania sterowania VFO

Cel zasadniczy (zakładając, że pole h jest dobrze zdefiniowane – w sensie relacji (6)):

$$[\dot{q}(\tau) - h(q_t(\tau), q(\tau), \cdot)] \rightarrow \mathbf{0} \quad (7)$$

↓

$$u_1(\tau) : \beta_O(\dot{q}^*(\tau)) \longrightarrow \beta_O(h^*(q_t(\tau), q(\tau), \cdot)) \quad (8)$$

$$u_2(\tau) : \|\dot{q}^*(\tau)\| \propto \|h^*(\tau)\| \cos \alpha(\tau) \quad (9)$$

przy czym

$$\alpha \triangleq \angle(g_2^*, h^*) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g_2^{*T} h^*}{\|g_2^*\| \|h^*\|}$$

(8): orientowanie

(9): *ostrożne* popychanie

Stosowalność metody VFO

$$\Sigma : \quad \dot{q} = g_1 u_1 + g_2(q) u_2, \quad q \in \mathbb{R}^n$$

Warunki konieczne

- C1. Σ w pełni sterowalny – spełnia warunek LARC (Lie Algebra Rank Condition)
- C2. Pole $g_2(q)$ jest regularne: $\forall q \in \mathcal{Q} \quad \|g_2(q)\| \neq 0$
- C3. Pole $g_2(q)$ jest ograniczone: $\forall q \in \mathcal{Q}: \|q\| < \infty \quad \|g_2(q)\| < \infty$
- C4. Pole $g_2^*(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$ jest orientowalne/kierowalne w \mathbb{R}^{n-1}

Dodatkowy pożądany warunek

- C5. Pole $g_2^*(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$ jest **w pełni** orientowalne w \mathbb{R}^{n-1} :

$$\forall \beta_O \in (-\pi, \pi] \quad \exists \bar{q} \in \mathbb{R}^n : \quad \text{Arg}(g_2^*(\bar{q})) = \beta_O$$

- Dotychczasowa skuteczność metody – przede wszystkim dla dla $n = 3$
- Warunki wystarczające ... ← problem otwarty

VFO dla 3D NHS – 5 etapów projektowych

E1. Sprawdzenie warunków C1-C4 (C5)

E2. Wyprowadzenie tzw. **warunku orientowania** (na podstawie (8))

E3. Zdefiniowanie **sygnałów pomocniczych**: $q_{1a}(q_t^*, q^*, \cdot)$, $e_{1a} \triangleq q_{1a} - q_1$ (zgodnie z E2)

E4. Zaprojektowanie **poła wektorowego zbieżności**

$$h \triangleq \begin{bmatrix} h_1(q_{1a}, \cdot) \\ h^*(q_t^*, q^*, \cdot) \end{bmatrix} \quad \text{takie, że: } q_{1a}(q_t^*, q^*, \cdot) \rightarrow q_{1t} \quad \text{gdy } q^* \rightarrow q_t^* \quad (10)$$

E5. Zdefiniowanie **sterowania orientującego** u_1 oraz **sterowania popychającego** u_2 :

$$u_{VFO} : \begin{cases} u_1 \triangleq h_1(q_{1a}, \cdot) \\ u_2 \triangleq k_2(q) \left\| h^*(q_t^*, q^*, \cdot) \right\| \cos \alpha, \quad k_2(q) \triangleq \frac{1}{\|g_2^*(q)\|} \end{cases} \quad (11)$$

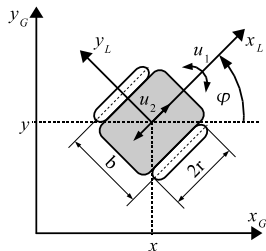
które winny zapewniać:

$$e_{1a}(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad [q_t^*(\tau) - q^*(\tau)] \rightarrow 0$$

Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Strategia VFO
- 3 Przykłady sterowników VFO**
- 4 Symulacje i eksperymenty
- 5 Rozszerzenia VFO
- 6 Podsumowanie

UMR system (Unicycle Mobile Robot)



UMR model

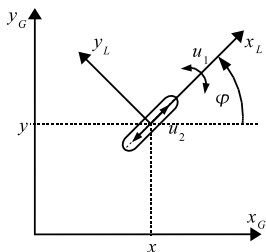
$$\Sigma_{\text{UMR}} : \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} u_2 \quad (12)$$

Ograniczenia nieholonomiczne

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$$

Analiza

- $\Sigma_{\text{UMR}} \in \Sigma$, $\mathbf{q} = [\varphi \ x \ y]^T \in \mathbb{R}^3$
- $\Sigma_{\text{UMR}}^* : \mathbf{g}_2^*(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$, $\dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$
- φ : zmienna orientująca ($\varphi \in Q_o$)
- x, y : zmienne popychane ($x, y \in Q_p$)
- u_1 : sterowanie orientujące ($u_1 \in U_o$)
- u_2 : sterowanie popychające ($u_2 \in U_p$)
- $U_o \cap U_p = \emptyset$



Sterowanie VFO dla UMR – etapy projektowe

E1. C1-C4 (oraz C5) spełnione dla $\mathcal{Q}_{UMR} = \mathbb{R}^3$ (przypadek *kanoniczny*)

E2. Warunek orientowania:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\varphi(\tau) - \text{Atan2}(\text{sgn}U_2 \cdot h_3, \text{sgn}U_2 \cdot h_2)] = 0$$

Element $\text{sgn}U_2$ pozwala na wybór strategii popychania: *przodem/tyłem* (traktowany jako parametr projektowy).

E3. Sygnały pomocnicze:

$$\varphi_a \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}U_2 \cdot h_3, \text{sgn}U_2 \cdot h_2) \in \mathbb{R}, \quad e_a \triangleq \varphi_a - \varphi$$

E4. Pole wektorowe zbieżności:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \mathbf{h}^* \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_a + \dot{\varphi}_a \\ k_p e^* + \boldsymbol{\nu}_t^* \end{bmatrix}, \quad e^* \triangleq \mathbf{q}_t^* - \mathbf{q}^*, \quad k_1, k_p > 0$$

E5. Sterowanie VFO:

$$\begin{aligned} u_1 &\stackrel{(11)}{=} h_1 \\ u_2 &\stackrel{(11)}{=} k_2(\mathbf{q}) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = k_1(\varphi_a - \varphi) + \dot{\varphi}_a \\ u_2 = h_2 \cos \varphi + h_3 \sin \varphi \end{cases} \quad (13)$$

Sterowanie VFO dla UMR – definicje dla $\text{sgn}U_2$ oraz ν_t^*

Dla zadania śledzenia

$$\text{sgn}U_2 \triangleq \text{sgn}(u_{2t})$$

$$\nu_t^* \triangleq \dot{q}_t^*(\tau)$$

$$\dot{q}_t^*(\tau) = \begin{bmatrix} \dot{x}_t(\tau) \\ \dot{y}_t(\tau) \end{bmatrix}$$

Dla zadania stabilizacji

$$\text{sgn}U_2 \triangleq \text{sgn}(e_{x0}) \quad (\text{zmienna decyzyjna})$$

$$\nu_t^* \triangleq \dot{q}_{vt}^*(e^*, q_t)$$

$$\dot{q}_{vt}^*(e^*, q_t) \triangleq \delta(e^*) g_2^*(\varphi_t)$$

$$\delta(e^*) \triangleq -\eta \text{sgn}U_2 \|e^*\|, \quad 0 < \eta < k_p$$

- Powyższe definicje stanowią **jedyne różnice** między sterownikami VFO dla śledzenia i stabilizacji
- Parametry projektowe sterowników VFO: k_1 , k_p oraz η (dla stabilizacji)

Sterowanie VFO dla UMR – punkty nieciągłości

Zbiór nieciągłości: $D = \{e^* : h^* = k_p e^* + v_t^* = \mathbf{0}\}$ ($\varphi_a, \dot{\varphi}_a$ nieokreślone w D)

Dla zadania śledzenia

$$h^* = \mathbf{0} \Leftrightarrow e^* = -k_p^{-1} \dot{q}_t^*$$

Tylko w stanach przejściowych

Dla zadania stabilizacji

$$h^* = \mathbf{0} \Leftrightarrow e^* = \mathbf{0}$$

Tylko w punkcie stabilizacji

Rozwiązanie \rightarrow dodatkowe definicje dla $\|h^*\| \leq \epsilon$

Śledzenie ($0 < \epsilon < \inf_{\tau} |u_{2t}(\tau)|$)

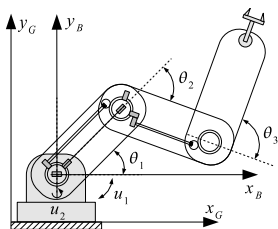
$$\begin{aligned} \varphi_a &\triangleq \varphi_{a-} \\ \dot{\varphi}_a &\triangleq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Stabilizacja ($\epsilon \geq 0$)

$$\begin{aligned} \varphi_a &\triangleq \varphi_t \\ \dot{\varphi}_a &\triangleq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Uwaga: Struktura sterownika VFO dla UMR **pozostaje niezmienną**

NHM3 system (NieHolonomiczny Manipulator z 3 ogniwami)



NHM3 model

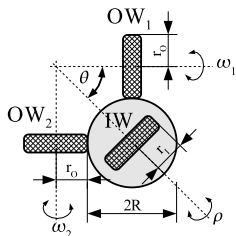
$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} u_2 \quad (16)$$

Ograniczenia nieholonomiczne

$$-\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_3 \sin \theta_1 = 0$$

Analiza

- $\Sigma_{\text{NHM3}} \in \Sigma$, $q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \in \mathbb{R}^3$
- Σ_{NHM3}^* : $g_2^*(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$, $\dot{q}^* = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$
- θ_1, θ_2 : zmienne orientujące ($\theta_1, \theta_2 \in Q_o$)
- θ_2, θ_3 : zmienne popychane ($\theta_2, \theta_3 \in Q_p$)
- u_1 : sterowanie orientujące ($u_1 \in U_o$)
- u_2 : sterowanie popychające (i orientujące) ($u_2 \in U_p \wedge u_2 \in U_o$)
- $U_o \cap U_p = \{u_2\}$



Nakamura, Chung, Sørtdalen 2001

Sterowanie VFO dla NHM3 – etapy projektowe

E1. C1-C4 (oraz C5) spełnione dla $\mathcal{Q}_{\text{NHM3}} = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : \theta_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$

E2. Warunek orientowania:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\theta_1(\tau) - \text{Atan2}(\text{sgn}U_2 \cdot h_2 \cos \theta_2, \text{sgn}U_2 \cdot h_3)] = 0$$

E3. Sygnały pomocnicze:

$$\theta_{1a} \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}U_2 \cdot h_2 \cos \theta_2, \text{sgn}U_2 \cdot h_3) \in \mathbb{R}, \quad e_a \triangleq \theta_{1a} - \theta_1$$

Element $\text{sgn}U_2$ pozwala na wybór strategii popychania: *przodem/tyłem* (traktowany jako parametr projektowy).

E4. Pole wektorowe zbieżności:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \mathbf{h}^* \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_a + \dot{\theta}_{1a} \\ k_p e^* + \nu_t^* \end{bmatrix}, \quad e^* = \mathbf{q}_t^* - \mathbf{q}^*, \quad k_1, k_p > 0$$

E5. Sterowanie VFO:

$$\begin{aligned} u_1 &\stackrel{(11)}{=} h_1 \\ u_2 &\stackrel{(11)}{=} k_2(\mathbf{q}) \|\mathbf{h}^*\| \cos \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_1 = k_1(\theta_{1a} - \theta_1) + \dot{\theta}_{1a} \\ u_2 = \frac{h_2 \sin \theta_1 + h_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2} \end{cases} \quad (17)$$

Sterowanie VFO dla NHM3 – definicje dla $\text{sgn}U_2$ oraz ν_t^*

Dla zadania śledzenia

$$\text{sgn}U_2 \triangleq \text{sgn}(u_{2t})$$

$$\nu_t^* \triangleq \dot{q}_t^*(\tau)$$

$$\dot{q}_t^*(\tau) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{2t}(\tau) \\ \dot{\theta}_{3t}(\tau) \end{bmatrix}$$

Dla zadania stabilizacji

$$\text{sgn}U_2 \triangleq \text{sgn}(e_{30}) \quad (\text{zmienna decyzyjna})$$

$$\nu_t^* \triangleq \dot{q}_{vt}^*(e^*, q_t)$$

$$\dot{q}_{vt}^*(e^*, q_t) \triangleq \delta(e^*) g_2^*(\theta_{1t}, \theta_{2t})$$

$$\delta(e^*) \triangleq -\frac{\eta \text{sgn}U_2 \|e^*\|}{\|g_2^*(\theta_{1t}, \theta_{2t})\|}, \quad 0 < \eta < k_p$$

- Powyższe definicje stanowią **jedynę różnicę** między sterownikami VFO dla śledzenia i stabilizacji
- Parametry projektowe sterowników VFO: k_1 , k_p oraz η (dla stabilizacji)

Sterowanie VFO dla NHM3 – punkty nieciągłości

Zbiór nieciągłości: $D = \{e^* : h^* = k_p e^* + \nu_t^* = \mathbf{0}\}$ ($\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}$ nieokreślone w D)

Dla zadania śledzenia

$$h^* = \mathbf{0} \Leftrightarrow e^* = -k_p^{-1} \dot{q}_t^*$$

Tylko w stanach przejściowych

Dla zadania stabilizacji

$$h^* = \mathbf{0} \Leftrightarrow e^* = \mathbf{0}$$

Tylko w punkcie stabilizacji

Rozwiązanie \rightarrow dodatkowe definicje dla $\|h^*\| \leq \epsilon$

Śledzenie ($0 < \epsilon < \inf_{\tau} |u_{2t}(\tau)|$)

$$\begin{aligned} \theta_{1a} &\triangleq \theta_{1a-} \\ \dot{\theta}_a &\triangleq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Stabilizacja ($\epsilon \geq 0$)

$$\begin{aligned} \theta_{1a} &\triangleq \theta_{1t} \\ \dot{\theta}_{1a} &\triangleq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Uwaga: Struktura sterownika VFO dla NHM3 **pozostaje niezmienniona**

NHCS3 system (NonHolonomic 3D Chained System)

NHCS3 model

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y_1 \end{bmatrix} u_2 \quad (20)$$

Ograniczenia nieholonomiczne

$$\dot{y}_3 - \dot{y}_2 y_1 = 0$$

Analiza

- $\Sigma_{\text{NHCS3}} \in \Sigma$, $\mathbf{q} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T \in \mathbb{R}^3$
- Σ_{NHCS3}^* : $\mathbf{g}_2^*(y_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}$
- y_1 : zmienna orientująca ($y_1 \in Q_o$)
- y_2, y_3 : zmienne popychane ($y_2, y_3 \in Q_p$)
- u_1 : sterowanie orientujące ($u_1 \in U_o$)
- u_2 : sterowanie popychające ($u_2 \in U_p$)
- $U_o \cap U_p = \emptyset$

Model integratora Brocketta

$$\stackrel{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{\longleftarrow} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_2 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix} u_2$$

Powyższy system można globalnie transformować do modelu NHCS3

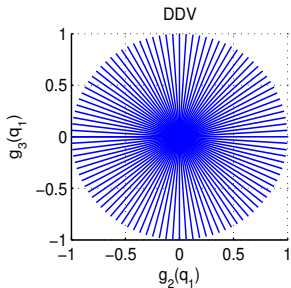
Sterowanie VFO dla NHCS3:

$$\begin{cases} u_1 = k_1(y_{1a} - y_1) + \dot{y}_{1a} \\ u_2 = \frac{h_2 + h_3 y_1}{1 + y_1^2} \end{cases}$$

gdzie

$$y_{1a} \triangleq \frac{h_3}{h_2}, \quad h_2 \neq 0$$

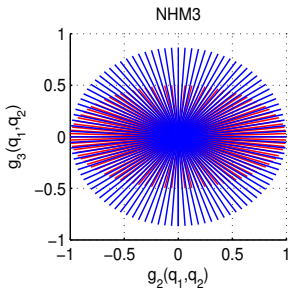
Orientowalność/kierowalność – interpretacja geometryczna



UMR

$$g_2^* = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

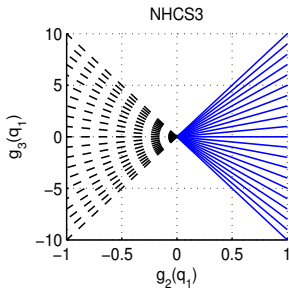
W pełni orientowalne w \mathbb{R}^2
(przykład kanoniczny)



NHM3

$$g_2^* = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

W pełni orientowalne w \mathbb{R}^2 dla $|\theta_2| \neq \frac{\pi}{2}$
(czyli dla $q \in \mathcal{Q}_{\text{NHM3}}$)



NHCS3

$$g_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

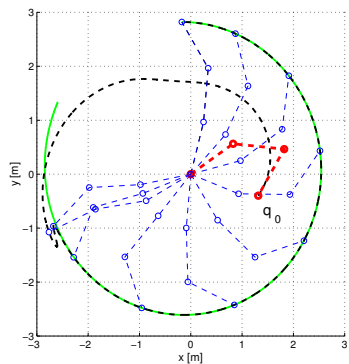
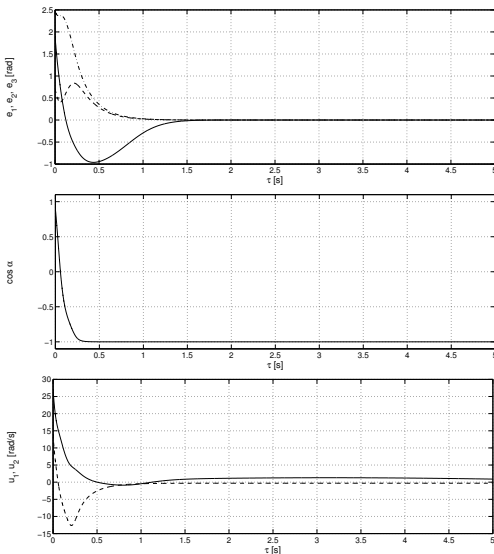
Nie w pełni orientowalne w \mathbb{R}^2
(kierunek osobliwy $g_{2s}^* = [0 \ y_1]^T$)

Wykres orientowalności pola NHM3 dla $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ (czerwony), $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ (niebieski).

Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Strategia VFO
- 3 Przykłady sterowników VFO
- 4 Symulacje i eksperymenty**
- 5 Rozszerzenia VFO
- 6 Podsumowanie

NHM3 system – symulacja A (śledzenie trajektorii)



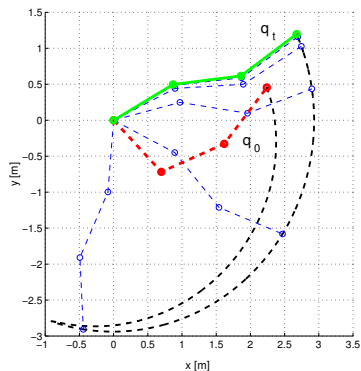
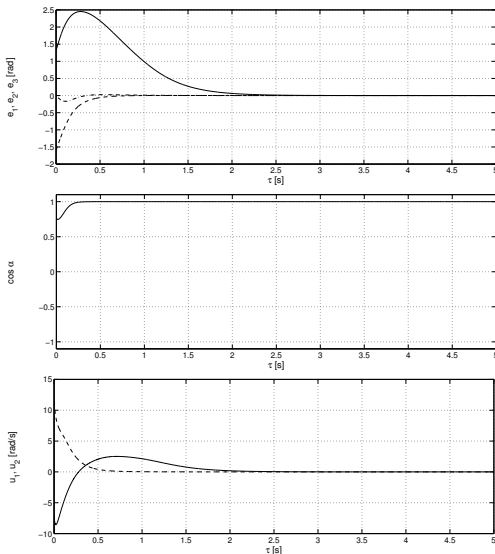
$q_t(\tau)$ jest rozwiązaniem Σ_{NHM3} dla:

$$\begin{bmatrix} u_{1t}(\tau) \\ u_{2t}(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sin 0.5\tau + 0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

$$q_{t0} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 10, \quad k_p = 5$$

NHM3 system – symulacja B (sterowanie do punktu)

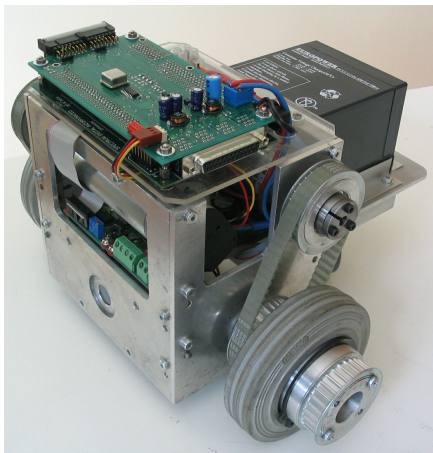


$$q_t = \begin{bmatrix} 0.52 \\ -0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 10, \quad k_p = 5, \quad \eta = 3$$

Robot mobilny MMS – stanowisko eksperymentalne

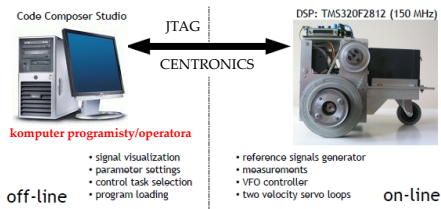
Robot MMS z napędem różnicowym



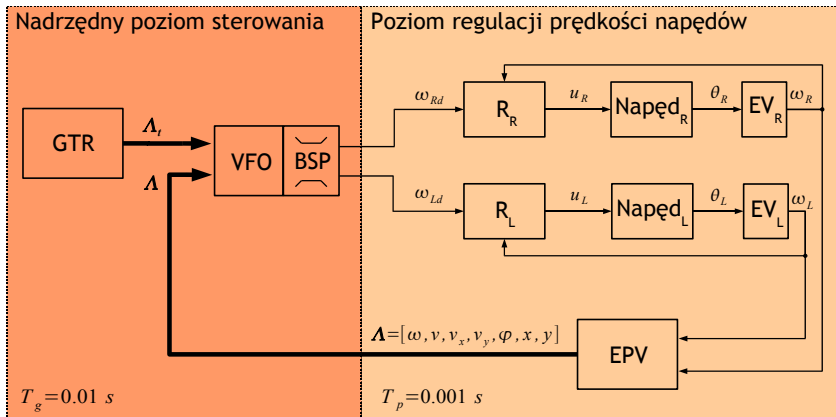
Podstawowe dane techniczne

L	długość platformy	0.250	[m]
H	wysokość platformy	0.162	[m]
b	rozstaw kół	0.240	[m]
r	promień koła	0.05	[m]
Ω_{max}	maks. prędkość kątowa	0.875	[obr/s]
V_{max}	maks. prędkość postępową	0.66	[m/s]
U_S	napięcie zasilania	12	[V]
P_M	moc silnika	20	[W]

Połączenie PC ↔ robot MMS



Struktura układu sterowania robota MMS



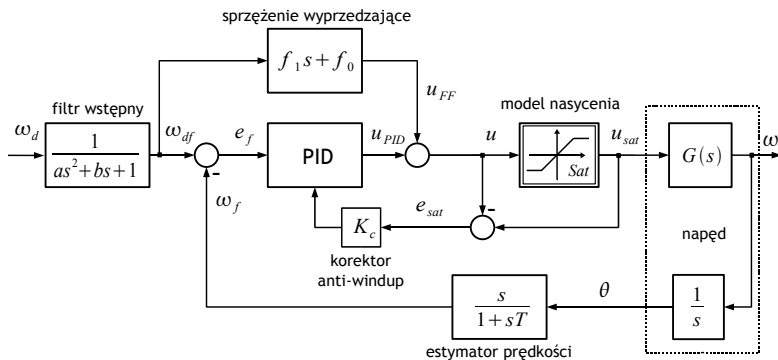
GTR: Generator Trajektorii Referencyjnej

BSP: Blok Skalowania Prędkości

EPV: Estymator Położenia i Prędkości platformy

EV: Estymator prędkości napędu

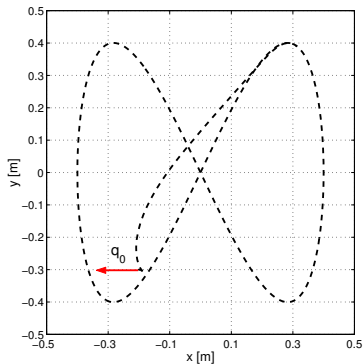
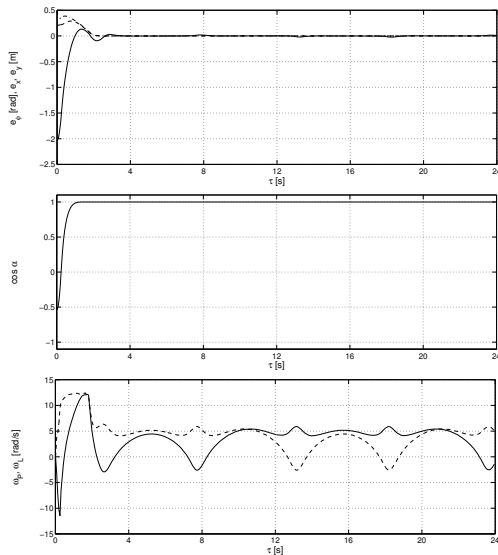
Obwód regulacji prędkości napędu robota MMS



$$G(s) \triangleq \frac{\Omega(s)}{U_{sat}(s)} \approx \frac{k}{T_m s + 1},$$

$$k = \frac{k_i}{Rb + k_i k_\omega}, \quad T_m = \frac{JR}{Rb + k_i k_\omega}$$

MMS system – eksperyment A (trajektoria ósemkowa)



$$x_t(\tau) = 0.4 \sin(0.3\tau)$$

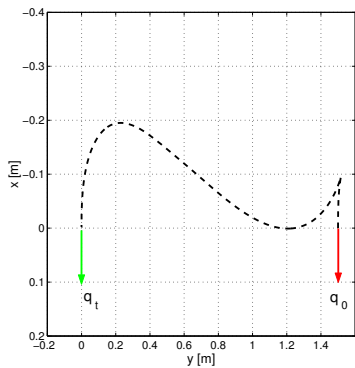
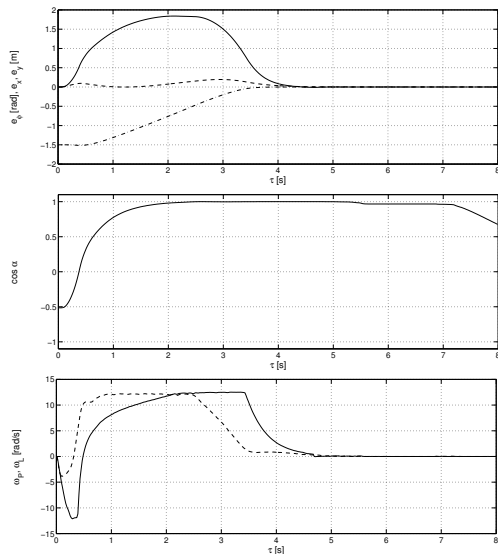
$$y_t(\tau) = 0.4 \sin(0.6\tau)$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 10, \quad k_p = 5$$

$$\omega_{wmax} = 12.5 \text{ rad/s}$$

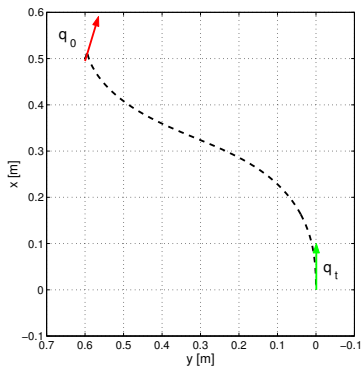
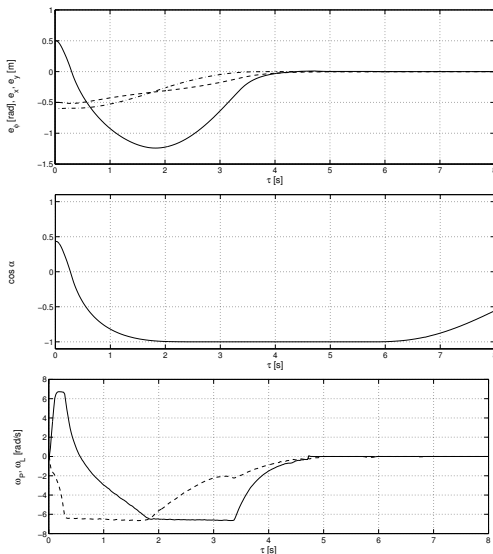
MMS system – eksperyment B (parkowanie równoległe)



$$q_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 10, \quad k_p = 5, \quad \eta = 3, \quad \epsilon = 0.005 \text{ m} \\ \omega_{\text{wmax}} = 12.5 \text{ rad/s}$$

MMS system – eksperyment C (parkowanie tyłem)



$$q_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 10, \quad k_p = 5, \quad \eta = 3, \quad \epsilon = 0.005 \text{ m} \\ \omega_{\text{wmax}} = 6.66 \text{ rad/s}$$

Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Strategia VFO
- 3 Przykłady sterowników VFO
- 4 Symulacje i eksperymenty
- 5 Rozszerzenia VFO**
- 6 Podsumowanie

Dotychczasowe rozszerzenia metody VFO

R1. Stabilizacja VFO z czasie skończonym z ograniczonym wejściem sterującym

zbieżność błędów w czasie skończonym z zachowaniem ograniczeń na amplitudę sygnałów sterujących; systemy UMR oraz NHM3

R2. Sterowanie VFO w warunkach naruszenia więzów nieholonomicznych

kompensacja wpływu poślizgu podczas śledzenia trajektorii pozycji

R3. Sterowanie VFO dla systemu dynamicznego z dryfem

potrójny integrator; prowadzi do sterowania PDD^2+FF

R4. Planowanie ruchu i przejazd przez zbiór punktów

zadanie typu *way-point following*

R5. Sterowanie VFO dla robota UMR z przyczepą jednoosiową

mocowanie przyczepy na osi (*ON-AXLE*) i poza osią (*OFF-AXLE*) kół ciągnika

R1. Stabilizacja VFO z czasie skończonym z ograniczonym wejściem

$$\mathbf{u}(\tau) = s(\tau) \cdot \mathbf{u}_N(\tau)$$

$$s(\tau) = \left[\max \left\{ \frac{|u_{1N}(\tau)|}{u_{1M}}, \frac{|u_{2N}(\tau)|}{u_{2M}}, 1 \right\} \right]^{-1}$$

$$u_{1N}(\tau) = k_1 \operatorname{sign}(e_a(\tau)) |e_a(\tau)|^\delta + \dot{q}_{aN}(\tau), \quad \delta \in (0, 1)$$

$$u_{2N}(\tau) = k_2(\mathbf{q}) \|\mathbf{h}^*(\tau)\|^\beta \cos \alpha, \quad \beta \in (0, 1)$$

- zbieżność błędów w czasie skończonym T (możliwość szacowania T)
- zachowanie ograniczeń narzuconych na amplitudę sygnałów sterujących: $|u_i(\tau)| \leq u_{iM}$, $i = 1, 2$
- $\delta = 0 \Rightarrow$ ślizgowe sterowanie orientujące
- $\delta = \beta = 1 \Rightarrow$ oryginalne sterowanie VFO (zbieżność asymptotyczna)
- zastosowane do UMR i NHM3

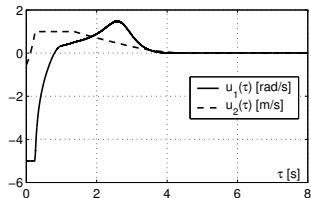
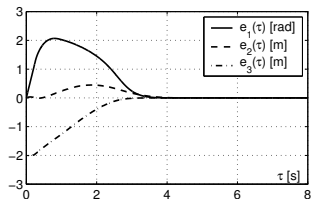
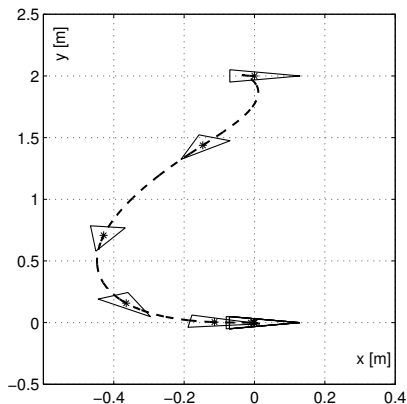
R1. Stabilizacja VFO z czasie skończonym z ograniczonym wejściem

Sterowanie VFO w czasie skończonym dla UMR

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_t &= [0 \ 0 \ 0]^T & \mathbf{q}_0 &= [0 \ 0 \ 2]^T \\
 u_{1M} &= 5 \text{ rad/s} & u_{2M} &= 1 \text{ m/s} \\
 k_1 &= 5, & k_p &= 3, & \eta &= 2 \\
 \delta &= \beta = \frac{2}{3}, & \varepsilon &= 0.001 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$u_1 = s \cdot [k_1 \text{sign}(e_a) |e_a|^{\frac{2}{3}} + \dot{\varphi}_{aN}]$$

$$u_2 = s \cdot \|e^*\|^{\frac{2}{3}} \cos \alpha$$



R2. Sterowanie VFO w warunkach naruszenia więzów

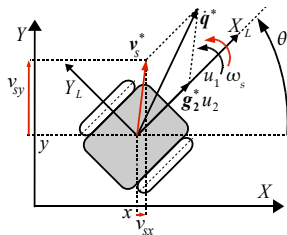
- Sterowanie VFO dla zaburzonego systemu UMR (zaburzenie traktowane jako dryf)

Dla poślizgu wyrażonego w układzie globalnym:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \cos \theta \\ u_2 \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_{sx} \\ v_{sy} \end{bmatrix} = \mathbf{v}_N(\mathbf{q}, \mathbf{u}) + \mathbf{v}_s$$

Dla poślizgu wyrażonego w układzie lokalnym pojazdu:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u_1 + \omega_s) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} (u_2 + v'_{sx}) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} v'_{sy}$$



- Propozycja: sterowanie VFO z nieliniową kompensacją zaburzenia (sprężenie wyprzedzające)

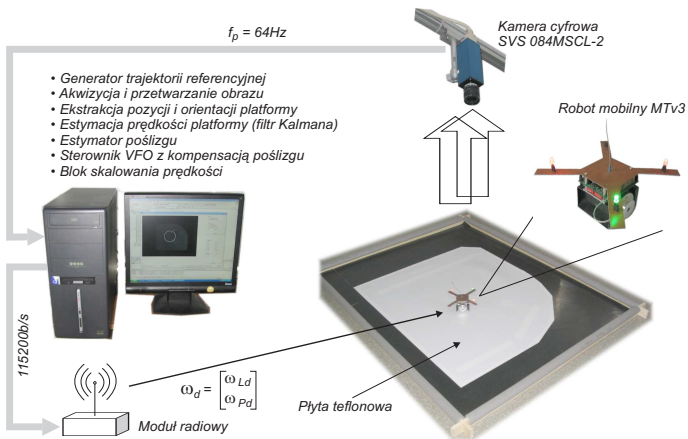
$$u_1 = k_1 e_a + \dot{\theta}_a - \hat{\omega}_s$$

$$u_2 = H_2 \cos \theta + H_3 \sin \theta$$

$$\mathbf{H}^* = [H_2 \ H_3]^T \triangleq \mathbf{h}^* - \hat{\mathbf{v}}_s^*, \quad \mathbf{h}^* \triangleq k_p \mathbf{e}^* + \dot{\mathbf{q}}_t^*$$

R2. Sterowanie VFO w warunkach naruszenia więzów

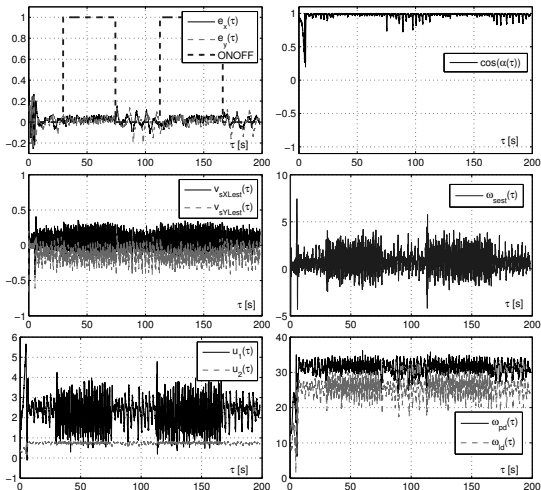
Stanowisko eksperymentalne



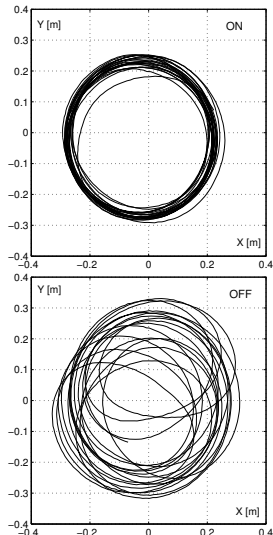
M. Michałek, P. Dutkiewicz, M. Kielczewski, D. Pazderski:

Eksperymentalna weryfikacja jakości sterowania VFO w obecności poślizgu dla pojazdu z napędem różnicowym, Krajowa Konferencja Robotyki 2008

R2. Sterowanie VFO w warunkach naruszenia więzów



1. trudne warunki sterowania – długodystansowy skutek chwilowych zaburzeń ruchu
2. działanie układu sterowania sprzężone ze zjawiskiem poślizgu ← *kompensacja ostrożna*
3. efektywne tłumienie wpływu poślizgu przy *ustalonych* warunkach zaburzenia



R3. Sterowanie VFO dla systemu dynamicznego z dryfem (3Int)

System 3Int:

$$\ddot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}$$

Wprowadzając zmienne stanu fazowe

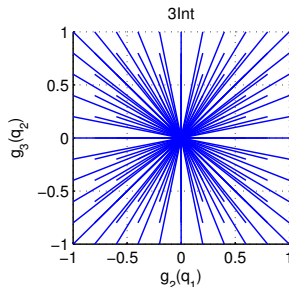
$$x_1 \triangleq x \quad x_2 \triangleq \dot{x} \quad x_3 \triangleq \ddot{x}$$

i zmieniając kolejność zmiennych

$$q_1 \triangleq x_3 \quad q_2 \triangleq x_2 \quad q_3 \triangleq x_1$$

można zapisać model 3Int w postaci:

$$\Sigma_{3Int} : \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = g_1 u_1 + g_2(q) \cdot u_2, \quad \begin{cases} u_1 \triangleq u \\ u_2 \equiv 1 \end{cases}$$



Interpretacje

- q_1, q_2 – zmienne orientujące (q_1 sterowana bezpośrednio) przy czym $q_2(\tau) = q_2(0) + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi$
- $u_2 \equiv +1$ – wirtualne sterowanie popychające (popychanie tylko w strategii *do przodu*)
- q_2 – jest także zmienną popychaną ($\dot{q}_2 = q_1 \cdot u_2, u_2 \equiv 1$)

R3. Sterowanie VFO dla systemu dynamicznego z dryfem (3Int)

Sterowanie orientujące:

$$u_1 \triangleq h_1 \quad \implies \quad u_1 = k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{q}_{1a}(\tau)$$

gdzie

$$\begin{aligned} q_{1a}(\tau) &\triangleq h_2(\mathbf{q}(\tau), \cdot), & e_{1a}(\tau) &\triangleq q_{1a}(\tau) - q_1(\tau), \\ q_{2a}(\tau) &\triangleq h_3(\mathbf{q}(\tau), \cdot), & e_{2a}(\tau) &\triangleq q_{2a}(\tau) - q_2(\tau). \end{aligned}$$

$$h_3 \triangleq k_3 e_3(\tau) + \dot{q}_{3t}(\tau), \quad k_3 > 0$$

$$h_2 \triangleq k_2 e_{2a}(\tau) + \dot{q}_{2a}(\tau), \quad k_2 > 0$$

$$h_1 \triangleq k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{q}_{1a}(\tau), \quad k_1 > 0$$

Postać rozwinięta sterowania orientującego:

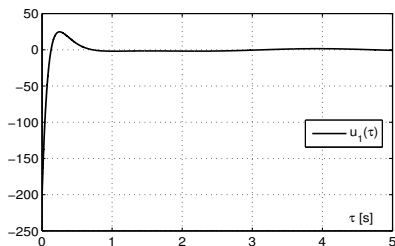
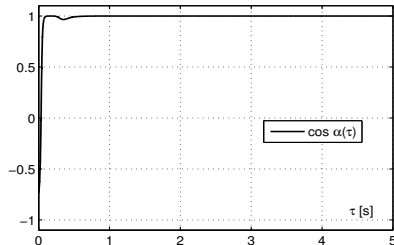
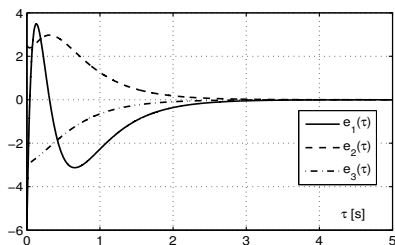
$$u_1 = (k_1 + k_2 + k_3)\ddot{e}_3 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)\dot{e}_3 + k_1 k_2 k_3 e_3 + \ddot{q}_{3t}$$

gdzie $e_3(\tau) = q_{3t}(\tau) - q_3(\tau)$. Jest to *klasyczne* prawo sterowania PDD²+FF (k_1, k_2, k_3 – parametry projektowe VFO)

Sterowanie popychające w przypadku systemu 3Int jest wirtualne: $u_2 \equiv +1$

(popychanie/dryfowanie systemu ze stałą intensywnością w strategii *do przodu*)

R3. Sterowanie VFO dla systemu dynamicznego z dryfem (3Int)



$$u_{1t}(\tau) \triangleq 1.5 \sin 2\tau$$

$$q_{t0} = [0 \ 0.5 \ 1]^T$$

$$q_0 = [6 \ -2 \ 4]^T$$

$$k_1 = 10, \quad k_2 = 5, \quad k_3 = 2$$

$$\alpha = \angle(g_2^*, h^*)$$

R4. Planowanie ruchu i przejazd przez zbiór punktów

Zbiór punktów przejazdowych:

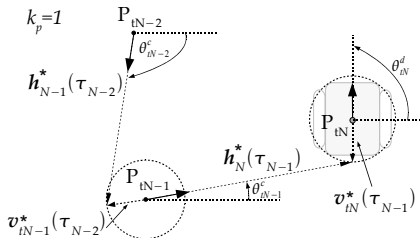
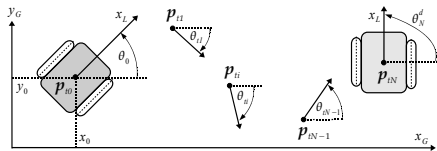
$$S_t \triangleq \{p_{t0}^{\pm}, p_{t1}^{\pm}, \dots, p_{ti}^{\pm}, \dots, p_{tN}^{\pm}\}, \quad N > 1, \quad \pm : \text{dojazd przodem/tyłem}$$

gdzie

$$p_{ti} = \begin{bmatrix} \theta_{ti} \\ x_{ti} \\ y_{ti} \end{bmatrix}, \quad p_{t0} \triangleq q_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad p_{tN} = \begin{bmatrix} \theta_{tN}^d \\ x_{tN} \\ y_{tN} \end{bmatrix} \quad (21)$$

oraz

$$\forall_{i=1,2,\dots,N-1} \quad \theta_{ti} := \begin{cases} \theta_{ti}^d & \text{gdy orientacja jest zadana a priori przez użytkownika} \\ \theta_{ti}^c & \text{gdy orientacja jest obliczona na etapie planowania ruchu} \end{cases}$$



R4. Planowanie ruchu i przejazd przez zbiór punktów

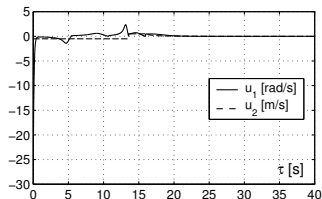
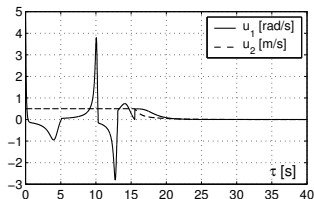
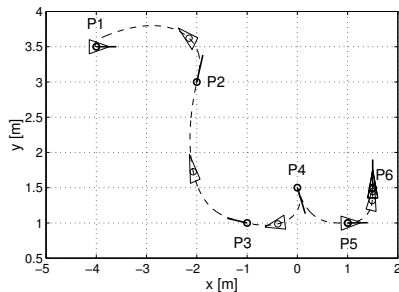
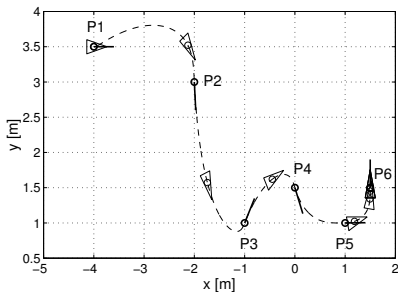
Dwa zbiory punktów przejazdowych z obliczonymi orientacjami (czerwony) wg metody VFO:

S1	P_1^+	P_2^+	P_3^+	P_4^+	P_5^+	P_6^+
θ_t [rad]	0.0	-1.503	1.055	-1.166	0.010	1.571
x_t [m]	-4.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	1.5
y_t [m]	3.5	3.0	1.0	1.5	1.0	1.5
η	3.0	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
$\text{sgn}U_2$	+1	+1	+1	+1	+1	+1
ϵ [m]	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005

S2	P_1^+	P_2^-	P_3^-	P_4^-	P_5^+	P_6^+
θ_t [rad]	0.0	-5.015	-3.308	-1.166	0.010	1.571
x_t [m]	-4.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	1.5
y_t [m]	3.5	3.0	1.0	1.5	1.0	1.5
η	3.0	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
$\text{sgn}U_2$	+1	-1	-1	-1	+1	+1
ϵ [m]	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005

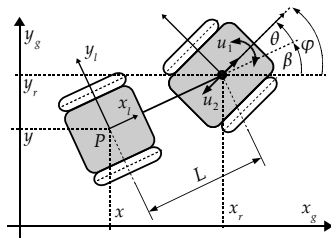
R4. Planowanie ruchu i przejazd przez zbiór punktów

Realizacja ruchu przez zbiory punktów przejazdowych wg strategii VFO



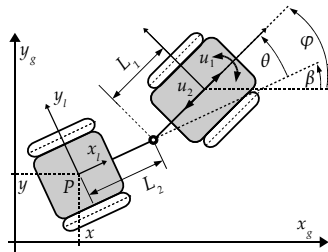
R5. Sterowanie VFO dla robota UMR z przyczepą jednoosiową

Mocowanie przyczepy na osi kół ciągnika:



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} -(1/L) \sin \theta \\ (1/L) \sin \theta \\ \cos \beta \cos \theta \\ \sin \beta \cos \theta \end{bmatrix} u_2$$

Mocowanie przyczepy poza osią kół ciągnika:



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{L_1}{L_2} \cos \theta \\ -\frac{L_1}{L_2} \cos \theta \\ L_1 \sin \theta \cos \beta \\ L_1 \sin \theta \sin \beta \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_2} \sin \theta \\ \frac{1}{L_2} \sin \theta \\ \cos \beta \cos \theta \\ \sin \beta \cos \theta \end{bmatrix} u_2$$

R5. Sterowanie VFO dla robota UMR z przyczepą jednoosiową (ON-AXLE)

Definiując wejścia pomocnicze

$$w_1 := u_2(1/L) \sin \theta$$

$$w_2 := u_2 \cos \theta$$

$$w_3 := u_1 - u_2(1/L) \sin \theta$$

można uzyskać model ze strukturą UMR:

$$\Sigma_\theta : \dot{\theta} = w_3$$

$$\bar{\Sigma} : \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} w_2$$

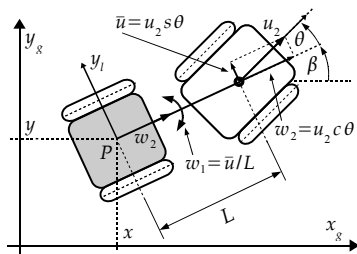
Sterowanie oryginalne (dla ciągnika):

$$u_2 = \sigma \frac{w_2}{\cos \theta} + (1 - \sigma) \frac{L w_1}{\sin \theta}$$

$$u_1 = w_3 + u_2(1/L) \sin \theta$$

gdzie $w_3 \triangleq k_\theta e_{\theta_a} + \dot{\theta}_a$, $k_\theta > 0$ oraz
 $\sigma = 1$ dla $|\theta| \in [0, \frac{\pi}{4})$, $\sigma = 0$ dla $|\theta| \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Interpretacja geometryczna:



Przyczepa traktowana jako system UMR
z fikcyjnymi wejściami w_1 i w_2



Możemy stosować strategię VFO
do podsystemu $\bar{\Sigma}$:

$$w_1 = k_\beta (\beta_a - \beta) + \dot{\beta}_a$$

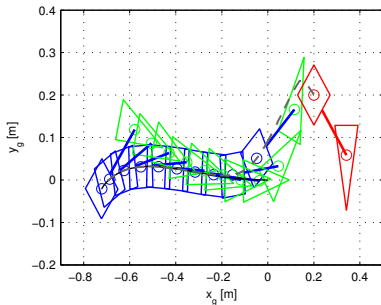
$$w_2 = h_x \cos \beta + h_y \sin \beta$$

R5. Sterowanie VFO dla robota UMR z przyczepą jednoosiową (ON-AXLE)

$$q_{t0} = \mathbf{0}$$

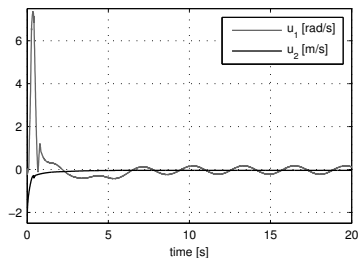
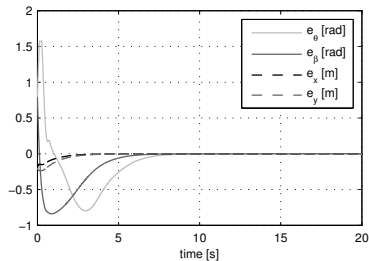
$$u_{1t}(\tau) = -0.025 + 0.2 \sin 2\tau$$

$$u_{2t}(\tau) = -0.04$$



$$q_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{4} & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}^T, \quad L = 0.2 \text{ m}$$

$$k_\theta = 10, \quad k_\beta = 5, \quad k_p = 1$$



R5. Sterowanie VFO dla robota UMR z przyczepą jednoosiową (OFF-AXLE)

Definiując wejścia pomocnicze $w = J(\theta)u$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_1}{L_2} \cos \theta & \frac{1}{L_2} \sin \theta \\ L_1 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

można uzyskać model ze strukturą UMR:

$$\Sigma_{\theta} : \dot{\theta} = u_1 - w_1$$

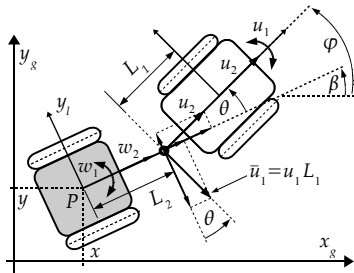
$$\bar{\Sigma} : \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} w_2$$

Sterowanie oryginalne (dla ciągnika):

$$u = J^{-1}(\theta)w$$

przy czym Σ_{θ} stanowi *dynamikę zerową* układu zamkniętego (ewolucja zmiennej θ jako skutek uboczny strategii VFO).

Interpretacja geometryczna:



Przyczepa traktowana jako system UMR z fikcyjnymi wejściami w_1 i w_2



Możemy stosować strategię VFO do podsystemu $\bar{\Sigma}$:

$$w_1 = k_{\beta}(\beta_a - \beta) + \dot{\beta}_a$$

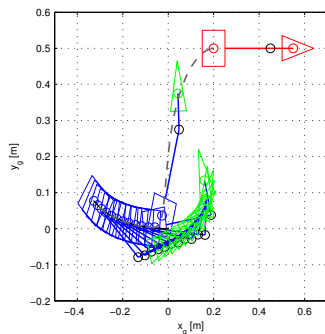
$$w_2 = h_x \cos \beta + h_y \sin \beta$$

R5. Sterowanie VFO dla robota UMR z przyczepą jednoosiową (OFF-AXLE)

$$q_{t0} = \mathbf{0}$$

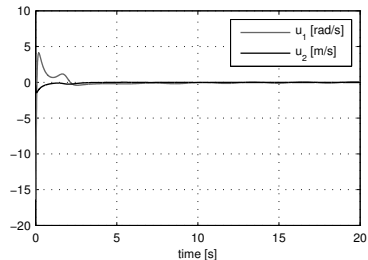
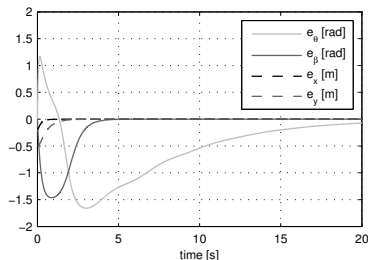
$$u_{1t}(\tau) = 0.01 + 0.1 \sin 2\tau$$

$$u_{2t}(\tau) = -0.02$$



$$q_0 = [0 \ 0 \ 0.2 \ 0.5]^T, \quad L_1 = 0.1 \text{ m}, \quad L_2 = 0.25 \text{ m}$$

$$k_\beta = 5, \quad k_p = 2$$



Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Strategia VFO
- 3 Przykłady sterowników VFO
- 4 Symulacje i eksperymenty
- 5 Rozszerzenia VFO
- 6 Podsumowanie**

Cechy sterowników VFO

Zalety

- szybkie i nieoscylacyjne stany przejściowe
- intuicyjna interpretacja składników sterowania
- zunifikowane podejście do zadań śledzenia i stabilizacji
- możliwość realizacji różnych zadań sterowania poprzez zmianę definicji pola zbieżności
- prostota syntezy parametrycznej i praktycznej implementacji
- VFO jako uogólnienie sterowania we współrzędnych biegunowych

Ograniczenia

- nieciągłość sterowania
- potencjalne problemy z odpornością w otoczeniu punktu stabilizacji

Publikacje na temat VFO: www.put.poznan.pl/~maciej.michalek